Εξέταση Ιουνίου 2021 - Απειροστικός Λογισμός 3

Στοιχειοθεσία Θεμάτων: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Msc).

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Μία είναι η σωστή απάντηση και αυτή πρέπει να επιλέξετε στις παρακάτω ερωτήσεις. Οι ερωτήσεις 1-6 είναι χωρισμένες σε τρεις ομάδες, ενώ οι ερωτήσεις 7-10 είναι κοινές. Ο χρόνος που τέθηκε στην κάθε ερώτηση είναι 6 λεπτά με 1 λεπτό διάλειμμα μεταξύ δυό διαδοχικών ερωτήσεων (Μετά τις 5 πρώτες ερωτήσεις υπήρχε διάλειμμα της τάξης των 5 λεπτών) Σε περίπτωση λάθος απάντησης υπάρχει επιβάρυνση 0.25 μονάδες, ενώ η επιλογή **δεν απαντώ** υπάρχει για να μην επιβαρυνθείτε με αρνητική βαθμολόγηση. Στους επιτυχόντες (δηλ. όσοι έγραψαν απο **3.5/10** και άνω) ακολούθησε προφορική εξέταση.

Ερώτηση 1.

(A) Δίνονται τα όρια

(i) $A = \lim\limits_{(x,y)\to(2,3)} \dfrac{(x-2)^{3/2}+(y-3)^{3/2}}{x+y-5}$

(ii) $B = \lim\limits_{(x,y,z)\to(-1,2,-3)} \dfrac{xy+y-2x-2}{(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2}$

(B) Δίνονται τα όρια:

(i) $A = \lim\limits_{(x,y,z)\to(1,2,0)} \dfrac{xy-2x-y+2}{(x-1)^2+(y-2)^2+z^2}$

(ii) $B = \lim\limits_{(x,y)\to(3,4)} \dfrac{(x-3)^{3/2}+(y-4)^{3/2}}{x+y-7}$

(C) Δίνονται τα όρια:

(i) $A = \lim\limits_{(x,y)\to(3,1)} \dfrac{(x-3)^{3/2}+(y-1)^{3/2}}{x+y-4}$

(ii) $B = \lim\limits_{(x,y,z)\to(2,3,4)} \dfrac{xy-2y-3x+6}{(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2}$

Επιλογές για κάθε ομάδα:

(1) Δεν απαντώ.

(2) Τα όρια A και B υπάρχουν.

(3) Τα όρια A και B δεν υπάρχουν.

(4) Το όριο A υπάρχει ενώ το B δεν υπάρχει.

(5) Το όριο B υπάρχει ενώ το A δεν υπάρχει.

Ερώτηση 2.

(A) Δίνονται τα σύνολα:

(i) $A = \{(x,y) \in (0,+\infty)^2 : x^2y < 1\}$

(ii) $B = \{(x,y,z) \in (0,+\infty)^3 : \sqrt{xyz} < 1\}$

(B) Δίνονται τα σύνολα:

(i) $A = \{(x,y) \in (0,+\infty)^2 : xy < 1\}$

(ii) $B = \{(x,y,z) \in (0,+\infty)^3 : \|(x,y,z)\|^3 < 1\}$

Επιλογές:

(1) Δεν απαντώ.

(2) το A είναι φραγμένο και το B είναι ανοικτό στον $\mathbb{R}^3$.

(3) το A είναι μη φραγμένο και το B είναι κλειστό στον $\mathbb{R}^3$.

(4) το A είναι φραγμένο και το B είναι κλειστό στον $\mathbb{R}^3$.

(5) το A είναι μη φραγμένο και το B είναι ανοικτό στον $\mathbb{R}^3$.

(6) κανένα από τα παραπάνω.

(C) Δίνονται τα σύνολα:

(i) $A = \{(x,y,z) \in (0,+\infty)^3 : (\|(x,y,z)\| + 1)^3 > 0\}$

(ii) $B = \{(x,y) \in (0,+\infty)^2 : (x+1)(y-1) \leq 1\}$

Επιλογές:

(1) Δεν απαντώ.

(2) τα A και B είναι μη φραγμένα.

(3) το A είναι φραγμένο και το B είναι μη φραγμένο.

(4) το A είναι μη φραγμένο και το B είναι μη φραγμένο.

(5) τα A και B είναι φραγμένα.

(6) κανένα από τα παραπάνω.

Ερώτηση 3.

(A) Δίνεται η $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 \quad , \quad (x-1)(y-2) = 0 \\ 0 \quad , \quad \text{αλλου} \end{cases}$$

Όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της f στα οποία υπάρχουν όλες οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης, αλλά η f δεν είναι συνεχής είναι:

(1) Δεν απαντώ.

(2) όλα τα σημεία με $x = 1$ ή $y = 2$.

(3) όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της f.

(4) το σημείο $(1,2)$.

(5) κανένα από τα παραπάνω.

(B) Δίνεται η $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} & , \quad x^2+y^2<1 \\ 2 & , \quad x^2+y^2 \geq 1 \end{cases}$$

Όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της f στα οποία η f είναι συνεχής, αλλά όχι διαφορίσιμη, είναι:

(1) Δεν απαντώ.

(2) τα σημεία του συνόλου στάθμης 2 της f.

(3) το σημείο $(0,0)$.

(4) το σημείο $(0,0)$ και όλα τα σημεία με $x^2+y^2=1$.

(5) κανένα από τα παραπάνω.

(C) Δίνεται η $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με

$$f(x,y) = \begin{cases} x & , \quad x=y \\ 0 & , \quad \text{αλλου} \end{cases}$$

Όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της f στα οποία η f έχει παραγώγους προς περισσότερες από δύο κατευθύνσεις, είναι:

(1) Δεν απαντώ.

(2) όλα τα σημεία με $x \neq y$ και στο σημείο $(0,0)$.

(3) όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της f.

(4) όλα τα σημεία με $x \neq y$

(5) κανένα από τα παραπάνω.

Ερώτηση 4. (Σωστό ή Λάθος;)

(A) Στα σημεία του συνόλου $E = \{(x,y,z) : z = -x-2y\}$ η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x,y,z) = e^{-(x+2y+z)}(2x-3y+z)$$

μεταξύ των κατευθύνσεων (δηλ. επιλέγουμε μία από τους δύο) $\bar{v} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$ παρουσιάζει τον μεγαλύτερο αρνητικό ρυθμό μεταβολής (δηλ. «την πιο απότομη κατηφόρα») στην κατεύθυνση $\bar{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$.

(B) Στα σημεία του συνόλου $E = \{(x,y,z) : z = -2x-y\}$ η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x,y,z) = e^{-(2x+y+z)}(4x+3y+z)$$

μεταξύ των κατευθύνσεων (δηλ. επιλέγουμε μία από τους δύο) $\bar{v} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,-2)$ παρουσιάζει τον μεγαλύτερο αρνητικό ρυθμό μεταβολής (δηλ. «την πιο απότομη κατηφόρα») στην κατεύθυνση $\bar{v} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1,0,2)$.

(C) Στα σημεία του συνόλου $E = \{(x, y, z) : z = -x - 2y\}$ η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x, y, z) = e^{-(x+2y+z)}(x + y + 2z)$$

μεταξύ των κατευθύνσεων (δηλ. επιλέγουμε μία από τους δύο) $\bar{v} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$ παρουσιάζει τον μεγαλύτερο αρνητικό ρυθμό μεταβολής (δηλ. «την πιο απότομη κατηφόρα») στην κατεύθυνση $\bar{v} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)$.

Επιλογές για κάθε ομάδα:

(1) Δεν απαντώ.

(2) Αληθής.

(3) Ψευδής.

Ερώτηση 5.

(A) Έστω $k, m \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ με $k \neq m$ και $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με

$$f(x, y) = x^k y^m (2x^2 + 3y^2)^{1/2}.$$

(B) Έστω $k, m \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ με $k \neq m$ και $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με

$$f(x, y) = x^k y^m (3x^2 + y^2)^{1/2}.$$

(C) Έστω $k, m \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ με $k \neq m$ και $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με

$$f(x, y) = x^k y^m (4x^2 + 3y^2)^{1/2}.$$

Επιλογές για κάθε ομάδα:

(i) Δεν απαντώ.

(ii) Ο Εσσιανός της f δεν ορίζεται σε κάθε σημείο του R^2.

(iii) Ο Εσσιανός της f ορίζεται σε κάθε σημείο του R^2, αλλά δεν είναι παντού συμμετρικός.

(iv) Ο Εσσιανός της f ορίζεται σε κάθε σημείο του R^2 και είναι παντού συμμετρικός.

Ερώτηση 6.

(A) Η $f\colon (0, +\infty)^2 \to \mathbb{R}$ με

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & , \quad y \leq 1 - x \\ \frac{1}{2} & , \quad y > 1 - x \end{cases}$$

(B) Η $f\colon (0, +\infty)^2 \to \mathbb{R}$ με

$$f(x, y) = \begin{cases} x^3 + y^3 & , \quad y < 1 - x \\ \frac{1}{2} & , \quad y \leq 1 - x \end{cases}$$

(i) Δεν απαντώ.

(ii) λαμβάνει ολικό μέγιστο στα σημεία του πεδίου ορισμού της f με $y = 1 - x$.

(iii) λαμβάνει ολικό ελάχιστο στα σημεία του πεδίου ορισμού της f με $y = 1 - x$.

(iv) δεν λαμβάνει ούτε ολικό ελάχιστο, ούτε ολικό μέγιστο.

(v) κανένα από τα παραπάνω.

(C) Η $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2 & , \quad x^2+y^2 \le 1 \\ \frac{1}{2} & , \quad x^2+y^2 > 1 \end{cases}$$

(i) Δεν απαντώ.

(ii) λαμβάνει ολικό ελάχιστο στο σημείο $(0,0)$ και δεν λαμβάνει ολικό μέγιστο.

(iii) λαμβάνει ολικό ελάχιστο στο σημείο $(0,0)$ και ολικό μέγιστο στα σημεία με $x^2+y^2 \ge 1$.

(iv) λαμβάνει ολικό ελάχιστο στο σημείο $(0,0)$ και ολικό μέγιστο στα σημεία με $x^2+y^2 = 1$.

(v) Κανένα από τα παραπάνω.

Ερώτηση 7. (Σωστό ή Λάθος;) Το σημείο του επιπέδου $z = 2x+y$ στον $\mathbb{R}^3$ με τη μικρότερη ευκλείδεια απόσταση από το σημείο $(0,1,0)$ είναι το $(x,y,z) = \dfrac{1}{5}(-2,5,1)$.

(1) Δεν απαντώ.

(2) Αληθής.

(3) Ψευδής.

Ερώτηση 8. (Σωστό ή Λάθος;) Η εξίσωση

$$xy + z + 4xz^5 = 5$$

μπορεί να επιλυθεί μοναδικά ως προς z γύρω από το σημείο $(1,0,1)$.

(1) Δεν απαντώ.

(2) Αληθής.

(3) Ψευδής.

Ερώτηση 9. (Σωστό ή Λάθος;) Το διανυσματικό πεδίο

$$\bar{f}(x,y) = (\sin(\ln(xy)), \ln(\sin(x^2+y^2)))^T$$

έχει ως μέγιστο πεδίο ορισμού την τομή της ένωσης όλων των δακτυλίων

$$C_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(2k+1)\pi} < \|(x,y)\| < \sqrt{2(k+1)\pi}\},\ k = 0,1,\dots,$$

με το δεύτερο και τέταρτο τεταρτημόριο.

Ερώτηση 10. (Σωστό ή Λάθος;) Το διανυσματικό πεδίο $\bar{f}\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ με

$$\bar{f}(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}(x^2-y^2, xy)^T$$

είναι τοπικά αντιστρέψιμη γύρω από το σημείο $(0,1)$.